

Le matrici mxn

Con le matrici è possibile eseguire l'operazione di addizione (termine a termine) SE HANNO LE STESSA DIMENSIONI e la moltiplicazione (riga per colonna) se le COLONNE DELLA PRIMA SONO IN NUMERO UGUALE ALLE RIGHE DELLA SECONDA. In tal caso la matrice prodotto di A mxn e B npx sarà C mpx.

Casi particolari matrici riga, colonna, diagonale, triangolare e trasposta

Le matrici quadrate sono matrici del tipo $A_{m \times n}$ con $m=n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Le matrici quadrate con l'operazione di addizione (termine a termine) e moltiplicazione (riga per colonna) costituiscono un anello non commutativo unitario. $(M_n, +, \times)$

❖ $(M_n, +)$ è un gruppo abeliano (commutativo) in quanto:

➤ È associativa $A+(B+C) = (A+B)+C$

➤ Esiste l'elemento neutro $N \in M$, N è la matrice nulla, di tutti 0 $A+N=A$

➤ Per ogni elemento A esiste l'opposto $-A$, la matrice con tutti gli elementi opposti rispetto A
 $A+(-A)=0$

➤ Gode della proprietà commutativa $A+B=B+A$

❖ \times è associativa $A*B*C=A*(B*C)=(A*B)*C$

❖ \times è distributiva a destra e sinistra rispetto $+$ $A*(B+C)=A*B+A*C$; $(A+B)*C=A*C+B*C$

❖ \times ha l'elemento neutro I matrice identità o unitaria (tutti 1 sulla diagonale principale, 0 altrove)
 $A*I=I*A=A$

Determinante di una matrice di ordine n

$$|a| = a$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

SOLO per quelle 3x3 si ricopiando le colonne e

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad \text{SARRUS}$$

Dal 3x3 in poi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \quad \text{dove } A_{ik} = (-1)^{i+k} |A_{ik}| \text{ matrice ottenuta eliminando i-ma riga k-}$$

ma colonna

Proprietà dei determinanti p18-22 T

Caratteristica di una matrice (numero max di righe colonne linearmente indipendenti (det diverso da 0))

Se il determinante di una matrice è diverso da zero la matrice è invertibile

$$\text{Inversa della } 2 \times 2 \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

L'inversa di una matrice 3x3 e successive ha gli elementi del tipo $c_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}$ quindi per costruirla

calcolo i complementi algebrici di ogni elemento e li traspongo dividendo poi tutto per il determinante

Applicazione dei determinanti:

- **area di un triangolo**
- **Retta per due punti**
- **Classificazione delle coniche**

LE MATRICI E I SISTEMI

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \text{ equivale alla scrittura } Ax=B \text{ con } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni del sistema dipendono dal determinante di A, diremo allora che il sistema è

1. DETERMINATO se $\text{Det}(A) \neq 0$
2. ha infinite soluzioni se $\text{det}(A)=0$ e $\text{rango}(A) = \text{rango}(A/B)$
3. non ha soluzioni se $\text{det}(A)=0$ e $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A/B)$

procedimento da seguire per sistemi numerici

1. calcolo determinante di A

- a. se $\neq 0$ trovo le soluzioni con cramer $x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\det(A)}$ $x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\det(A)}$ etc
- b. se $=0$ calcolo determinante di A/B dopo aver tolto una colonna ad A
 - i. se anche questo $=0$ ho ∞^1 soluzioni (caso 2)
 - ii. se non $=0$ è impossibile (caso 3)
 - iii. se solo una riga risulta indipendente $r(A)=r(A/B)=1$ le soluzioni sono ∞^2 .

procedimento da seguire per sistemi letterali

1. calcolo determinante di A (che dipenderà da lettere)
 - a. per i valori delle lettere per cui il determinante è $\neq 0$ trovo le soluzioni con cramer
 - b. per i valori per cui $=0$ sostituisco nella matrice completa e vedo quale colonna si può eliminare, calcolo determinante di A/B
 - i. per i valori delle lettere per cui anche questo $=0$ ho ∞^1 soluzioni (caso 2)
 - ii. per i valori delle lettere per cui non $=0$ è impossibile (caso 3)
 - iii. se solo una riga risulta indipendente le soluzioni sono ∞^2 .

procedimento da seguire per sistemi omogenei

nel sistema omogeneo,

1. se $\text{Det}(A) \neq 0$ ho solo la soluzione nulla (0,0,0)
2. se $\text{Det}(A)=0$ ho ∞^1 o ∞^2 soluzioni se le righe indipendenti sono 2 o 1

quindi per avere una soluzione non nulla deve essere $\text{det}(A)=0$

Studio tradizionale di una trasformazione con le matrici determinando punti e rette uniti

Ricordo che per studiare una trasformazione, data sottoforma di matrice o di sistema, si procede nel seguente modo:

1) Calcolo del determinante

Il determinante di una matrice mi dice se essa è invertibile quindi determinante $\neq 0$ vuol dire che non è una trasformazione del piano poiché queste sono invertibili. Inoltre il determinante di una matrice che rappresenta una trasformazione è il numero che rappresenta il rapporto fra le aree delle figure trasformate quindi se diverso da 1 in valore assoluto non può essere un'isometria; al contrario se è 1 non è detto che lo sia. Le aree infatti possono rimanere equiestese ma avere forme diverse quindi si verifica la forma (vettori perpendicolari e unitari

- a) Se $|\det(A)|=1$ controllo se è un'isometria
 1. Perpendicolarità fra segmenti ($ab+cd=0$) (non varia la forma)
 2. Unitarietà dei segmenti ($a^2+c^2=b^2+d^2=1$) (non variano le dimensioni)
 3. se non sono verificate 1 e 2 non è isometria ma neppure similitudine
- b) Se $|\det(A)|\neq 1$ non è un'isometria vedo se è similitudine
 1. Perpendicolarità fra segmenti ($ab+cd=0$) (non varia la forma)
 2. uguaglianza dei segmenti ($a^2+c^2=b^2+d^2=k^2$) (sono proporzionali)
 3. se non è verificato 1 e 2 non è similitudine
- c) Nei casi a e b specifico, se ci riesco, il tipo di isometria o similitudine

2) Individuo i punti uniti della trasformazione cioè quelli per cui $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

Una trasformazione che ha 1 punto unito è detta a centro come simmetria centrale, rotazione e omotetia.
Se ha più di un punto ne ha infiniti cioè una retta. Allora è una simmetria assiale.
Se non ne ha può essere una traslazione o una generica affinità.

- a) Per fare questo sostituisco a x' la x e a y' la y nelle equazioni e risolvo il sistema:
 1. Se è impossibile non ho punti uniti
 2. Se ho un'unica soluzione ho un punto unito (trasformazione a centro)
 3. Se è indeterminato la relazione che trovo fra le variabili è una retta di punti uniti

3) Individuo le rette unite quelle che conservano la stessa equazione cioè: $y=mx+q$ prima e dopo la trasformazione. Poiché le variabili sono le stesse questo implica $m=m'$ e $q=q'$

Una trasformazione che ha rette unite può essere una traslazione (tutte quelle parallele al vettore) una simmetria centrale (tutte quelle per il centro) una simmetria assiale (l'asse più tutte le perpendicolari ad esso) l'omotetia (quelle per O). se non ne ha può essere una rotazione o

1. Determino dalle $\begin{cases} x' = \dots \\ y' = \dots \end{cases}$ la trasformazione inversa di equazioni $\begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$
2. sostituisco questi valori nella equazione della retta e riscrivo questa nella forma $y=mx+q$
3. pongo: $\begin{cases} m = m_{trasformato} \\ q = q_{trasformato} \end{cases}$ e risolvo
4. le soluzioni di questo sistema, se esistono, individuano la/le retta/e invarianti

prendere la tabella delle trasformazioni espresse sottoforma di matrici e verificare queste proprietà